Zur Theorie

der

adjungirten Differentialgleichungen.

Habilitationsschrift,

der

Philosophischen Facultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Dr. August Gutzmer.

Halle a. S.
1896.

Vorbemerkung.

Bei dem Studium der Abhandlung des Herrn *Frobenius* „über die Determinante mehrerer Functionen einer Variabeln“*) habe ich bereits im Jahre 1888 bemerkt, dass man die darin niedergelegten Untersuchungen verallgemeinern kann, und dass zu einem gegebenen Systeme von n Functionen einer Veränderlichen (zu einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung), dessen Determinante nicht identisch gleich Null ist, nicht nur ein System, sondern n Systeme adjungirter Functionen (n adjungirte lineare homogene Differentialgleichungen) gehören. Der wirklichen Aufstellung und Untersuchung der $n-1$ neuen adjungirten Gleichungen einer gegebenen Differentialgleichung $n$ter Ordnung stellten sich jedoch grosse Schwierigkeiten entgegen. Herr *J. Cels* ist dann auf dieselbe Frage geführt worden, und er hat gezeigt**), wie man diese n Adjungirten erhalten kann. Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt bei Herrn *Cels* in der Verwendung der verschiedenen Adjungirten einer Differentialgleichung für eine eigentümliche Integrationsmethode, deren Brauchbarkeit an speciellen Klassen von linearen Differentialgleichungen erwiesen wird. Im Nachstehenden wird versucht, einige weitere Eigenschaften der adjungirten Differentialgleichungen aufzudecken.

Die folgenden Betrachtungen waren bereits bis auf Einzelheiten fertig niedergeschrieben, als eine Arbeit***) des Herrn *E. Grünfeld*

---

*) Journal für Mathematik, Bd. 77, S. 245—257. 1874.

**) Annales Scientifiques de l'École. Normale Supérieure. 1891. Besonderer Umstände wegen bin ich erst 1894 auf diese Arbeit in Folge des Referats im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik aufmerksam geworden.

***) Journal für Mathematik, Bd. 115, S. 328—342. 1895.

erschien, die in ihrer ersten Hälfte mit den entsprechenden Abschnitten der vorliegenden Untersuchung teilweise übereinstimmt. Einige Rechnungen konnten in Folge dessen unterdrückt werden.

Nach einigen allgemeinen Betrachtungen richtet sich die nachstehende Untersuchung im wesentlichen auf die erste Adjungirte*) einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung. Es ist dies nächst der gewöhnlichen, *Lagrange*'schen Adjungirten — der $n$ten — der einfachste sich darbietende Fall. Die Schwierigkeiten, welche sich bei der Behandlung der übrigen $n-2$ Adjungirten (der 2ten bis $(n-1)$ten) erheben, lassen sich zum Teil aus der in dieser Beziehung weitergehenden Untersuchung des Herrn *Grünfeld* erkennen. Ich behalte mir vor, an anderer Stelle auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

*) In der Ausdrucksweise des Herrn *Cels* ist dies die „Adjungirte der ersten Zeile", wofür wir die obige kurze und unzweideutige Bezeichnung gebrauchen.

I.

Adjungirte Systeme von Functionen; reciproke Beziehung derselben.

1. Es sei $y_1, y_2, \dots y_n$ ein System von n linear unabhängigen Functionen einer Veränderlichen x, dann ergiebt sich durch Entwickelung der Determinante

$$D(y_1, y_2, \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-2)} & y_2^{(k-2)} & \dots & y_n^{(k-2)} \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_n^{(k-1)} \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \dots & y_n^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der $k$ten Zeile das Gleichungssystem

$$\begin{cases} y_1^{(\alpha)} z_{k,1} + y_2^{(\alpha)} z_{k,2} + \dots + y_n^{(\alpha)} z_{k,n} = 0 & (\alpha = 0, 1, \dots k-2, k, \dots n-1) \\ y_1^{(k-1)} z_{k,1} + y_2^{(k-1)} z_{k,2} + \dots + y_n^{(k-1)} z_{k,n} = 1. \end{cases}$$

Dabei bedeuten $z_{k,1}, z_{k,2}, \dots z_{k,n}$ die den Elementen $y_1^{(k-1)}, y_2^{(k-1)}, \dots y_n^{(k-1)}$ adjungirten Unterdeterminanten der Determinante $D(y_1, y_2, \dots y_n)$, dividirt durch diese letztere; also ist

$$z_{k,\nu} = (-1)^{k+\nu} \frac{\left| y_\mu^{(\lambda-1)} \right|}{D(y_1, y_2, \dots y_n)} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \dots \nu-1, \nu+1, \dots n \\ \lambda = 1, 2, \dots k-1, k+1, \dots n \end{pmatrix}.$$

Unter Benutzung der Bezeichnungsweise

$$s_{\alpha,\beta} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(\alpha)} z_{k,\nu}^{(\beta)}$$

nehmen die oben entwickelten Gleichungen die Form an:

(1) $s_{0,0} = 0,\ s_{1,0} = 0,\ \ldots\ s_{k-2,0} = 0,\ s_{k-1,0} = 1,\ s_{k,0} = 0,\ \ldots\ s_{n-1,0} = 0.$

Mit Hülfe des von Herrn *Frobenius* verwendeten Gleichungssystems*)

$$\frac{d^\mu s_{\lambda-\mu,0}}{dx^\mu} = s_{\lambda,0} + \binom{\mu}{1} s_{\lambda-1,1} + \binom{\mu}{2} s_{\lambda-2,2} + \cdots + s_{0,\lambda} \qquad (\mu = 1,\ 2,\ \ldots\ \lambda)$$

ergiebt sich leicht für $\alpha + \beta = 0,\ 1,\ \ldots\ n$ folgende Bestimmung von $s_{\alpha,\beta}$; es ist:

$$s_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0, & \text{für } \alpha+\beta < k-1, \\ (-1)^\beta, & \text{für } \alpha+\beta = k-1, \\ 0, & \text{für } k-1 < \alpha+\beta \leqq n-1, \\ (-1)^\beta s_{n,0} = (-1)^{n+\beta} s_{0,n}, & \text{für } \alpha+\beta = n. \end{cases}$$

Heben wir von diesen Relationen nur diejenigen heraus, in denen $\alpha = 0$ ist, so erhalten wir die den Gleichungen (1) vollkommen analogen Beziehungen:

(2) $s_{0,0} = 0,\ s_{0,1} = 0,\ \ldots\ s_{0,k-2} = 0,\ s_{0,k-1} = (-1)^{k-1},\ s_{0,k} = 0,\ \ldots\ s_{0,n-1} = 0,$

welche in ausführlicherer Schreibweise lauten:

$$\begin{cases} z_{k,1}^{(\alpha)}\ y_1 + z_{k,2}^{(\alpha)}\ y_2 + \cdots + z_{k,n}^{(\alpha)}\ y_n = 0, & (\alpha = 0,\ 1,\ \ldots\ k-2,\ k,\ \ldots\ n) \\ z_{k,1}^{(k-1)}\ y_1 + z_{k,2}^{(k-1)} y_2 + \cdots + z_{k,n}^{(k-1)}\ y_n = (-1)^{k-1}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen einerseits, dass die Determinante

$$D(z_{k,1},\ z_{k,2},\ \ldots\ z_{k,n})$$

*) A. a. O. S. 249. S. a. *Schlesinger*, Handbuch I, S 63, wo die Ableitung des Herrn *Frobenius* wiedergegeben worden ist.

im Allgemeinen nicht gleich Null ist, da sonst $s_{0,\,k-1}$ verschwinden müsste, was nicht der Fall ist; es bilden demnach $z_{k,\,1}, z_{k,\,2}, \ldots z_{k,\,n}$, ebenso wie $y_1, y_2, \ldots y_n$, ein System von n linear unabhängigen Functionen. Andererseits lässt das Gleichungssystem (2) die Analogie zwischen $y_1, y_2, \ldots y_n$ hervortreten und zugleich erkennen, dass die Beziehung zwischen diesen Functionensystemen in dem üblichen Sinne eine reciproke ist.

2. Da in der obigen Betrachtung k ein ganz beliebiger Wert der Zahlenreihe 1, 2, ... n ist, so giebt es also im Ganzen n Functionssysteme, die zu dem ursprünglichen System $y_1, y_2, \ldots y_n$ in reciproker Beziehung stehen, und die man daher in Uebertragung der gebräuchlichen Bezeichnung als diesem letzteren *adjungirt* bezeichnen wird.

Damit ist zugleich für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen nachgewiesen, dass zu jeder Gleichung $n$ter Ordnung im Allgemeinen n adjungirte Gleichungen, und zwar sämtlich von der $n$ten Ordnung, gehören. Bilden $y_1, y_2, \ldots y_n$ ein Fundamentalsystem einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung, so stellen die Grössen

$$z_{k,\,\nu} = (-1)^{k+\nu} \frac{\left| y_\mu^{(\lambda-1)} \right|}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \nu-1, \nu+1, \ldots n \\ \lambda = 1, 2, \ldots k-1, k+1, \ldots n \\ \nu = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{k+\nu} \frac{\partial \log D(y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial y_\nu^{(k-1)}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

das entsprechende Fundamentalsystem der $k$ten adjungirten Differentialgleichung dar. Für $k = n$ erhält man das entsprechende Fundamentalsystem der gewöhnlichen, *Lagrange*'schen adjungirten Differentialgleichung.

Aus der Reciprocität zwischen den Fundamentalsystemen $y_1, y_2, \ldots y_n$ und $z_{k,\,1}, z_{k,\,2}, \ldots z_{k,\,n}$, die sich in den Gleichungen (1) und (2) ausspricht, erschliesst man unmittelbar: *Die kte Adjungirte von der kten Adjungirten einer gegebenen linearen Differentialgleichung stimmt mit der letzteren, abgesehen von dem Vorzeichen, überein.*

II.

Determinantenbeziehungen.

1. Zwischen den linear unabhängigen Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ und den $n$ten Adjungirten derselben $z_{n,1}, z_{n,2}, \ldots z_{n,n}$ besteht, wie Herr *Frobenius* gezeigt hat*), die Determinantenbeziehung

$$(1) \quad D(y_1, y_2, \ldots y_n) \cdot D(z_{n,\nu+1}, z_{n,\nu+2}, \ldots z_{n,n}) = D(y_1, y_2, \ldots y_\nu),$$

aus der speciell für $\nu = 0$ sich ergiebt:

$$(2) \qquad D(y_1, \ldots y_n) \cdot D(z_{n,1}, \ldots z_{n,n}) = 1.$$

Es entsteht die Frage, welche Beziehungen zwischen den entsprechenden Determinanten stattfinden, wenn man statt des Systemes $z_{n,1}, \ldots z_{n,n}$ eines der übrigen adjungirten Systeme $z_{k,1}, \ldots z_{k,n}$ betrachtet.

Das Determinantenproduct

$$D(y_1, \ldots y_n) \cdot D(z_{k,\nu+1}, \ldots z_{k,n}) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \ldots y_\nu & y_{\nu+1} & \ldots y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(\nu-1)} & \ldots y_\nu^{(\nu-1)} & y_{\nu+1}^{(\nu-1)} & \ldots y_n^{(\nu-1)} \\ y_1^{(\nu)} & \ldots y_\nu^{(\nu)} & y_{\nu+1}^{(\nu)} & \ldots y_n^{(\nu)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots y_\nu^{(n-1)} & y_{\nu+1}^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots 1 & 0 & \ldots 0 \\ z_{k,1} & \ldots z_{k,\nu} & z_{k,\nu+1} & \ldots z_{k,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{k,1}^{(n-\nu-1)} & \ldots z_{k,\nu}^{(n-\nu-1)} & z_{k,\nu+1}^{(n-\nu-1)} & \ldots z_{k,n}^{(n-\nu-1)} \end{vmatrix}$$

*) A. a. O. S. 251. *Schlesinger*, Handbuch I, S. 64.

verwandelt sich durch zeilenweise Zusammensetzung in die Form

$$(3)\quad D(y_1, \dots y_n)\, D(z_{k,\nu+1}, \dots z_{k,n}) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots y_\nu & s_{0,0} & \dots s_{0,n-\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(\nu-1)} & \dots y_\nu^{(\nu-1)} & s_{\nu-1,0} & \dots s_{\nu-1,n-\nu-1} \\ y_1^{(\nu)} & \dots y_\nu^{(\nu)} & s_{\nu,0} & \dots s_{\nu,n-\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots y_\nu^{(n-1)} & s_{n-1,0} & \dots s_{n-1,n-\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Für ν ist ein beliebiger Zahlenwerth der Reihe $0, 1, \dots n-1$ zu wählen. Nehmen wir $\nu = n$ an, so geht die rechte Seite in $D(y_1, \dots y_n)$ über, mithin haben wir $D(z_{k,n+1}, \dots) = 1$ zu setzen, eine Gleichung, die wir später noch benutzen werden.

Multiplicirt man auf dieselbe Weise $D(y_1, \dots y_n)$ mit der Determinante

$$D(z_{k,1}, \dots z_{k,\nu}) = \begin{vmatrix} z_{k,1} & \dots z_{k,\nu} & z_{k,\nu+1} & \dots z_{k,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{k,1}^{(\nu-1)} & \dots z_{k,\nu}^{(\nu-1)} & z_{k,\nu+1}^{(\nu-1)} & \dots z_{k,n}^{(\nu-1)} \\ 0 & \dots 0 & 1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots 0 & 0 & \dots 1 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich:

$$(4)\quad D(y_1, \dots y_n)\, D(z_{k,1}, \dots z_{k,\nu}) = \begin{vmatrix} s_{0,0} & \dots s_{0,\nu-1} & y_1 & \dots y_{n-\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu-1,0} & \dots s_{\nu-1,\nu-1} & y_1^{(\nu-1)} & \dots y_{n-\nu}^{(\nu-1)} \\ s_{\nu,0} & \dots s_{\nu,\nu-1} & y_1^{(\nu)} & \dots y_{n-\nu}^{(\nu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1,0} & \dots s_{n-1,\nu-1} & y_1^{(n-1)} & \dots y_{n-\nu}^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Die Werte der rechten Seiten in den Gleichungen (3) und (4) hängen, abgesehen von ν, wesentlich von dem Werte der Zahl k ab. Es ist mir nicht gelungen, die Wertermittelung jener Determinanten

allgemein durchzuführen*), und ich habe mich deshalb im wesentlichen auf die Betrachtung des Falles $k = 1$ beschränkt.

Wir wollen zum Beispiel ν so bestimmen, dass alle Elemente $s_{0,0}, \ldots s_{\nu-1, n-\nu-1}$ der ν ersten Zeilen in der Gleichung (3) verschwinden. In I ist gezeigt worden, dass $s_{\alpha,\beta} = 0$ ist für $\alpha + \beta < k - 1$. Es muss also, damit $s_{\nu-1, n-\nu-1}$ verschwinde, ν so gewählt werden, dass $\nu - 1 + n - \nu - 1 = n - 2 < k - 1$ oder $n - 1 < k$ ist, d. h. es muss $k = n$ sein. Wir können also schliessen: *Nur in dem Falle der gewöhnlichen* $(k = n)$ *Adjungirten ist das Product* $D(y_1, \ldots y_n) \cdot D(z_{k,\nu-1}, \ldots z_{k,n})$ *in der Form* $D(y_1, \ldots y_\nu) \cdot |s_{\nu+\lambda,\varrho}|$ $(\lambda, \varrho = 0, 1, \ldots n - \nu - 1)$ *darstellbar.* Man erhält dann natürlich ohne weiteres die von Herrn *Frobenius* stammende Gleichung (1).

Ist $\nu = n - 1$, so geht die linke Seite von (3) in $D(y_1, \ldots y_n) \cdot z_{k,n}$ über; die rechte Seite enthält in der letzten Colonne lauter verschwindende Elemente, mit Ausnahme des Elementes $s_{k-1,0} = 1$. Es wird also

$$D(y_1, \ldots y_n) \cdot z_{k,n} = (-1)^{n+k} \left| y_\mu^{(\lambda-1)} \right|, \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots n-1 \\ \lambda = 1, 2, \ldots k-1, k+1, \ldots n \end{pmatrix}$$

in Uebereinstimmung mit dem aus der Definition der Grössen $z_{k,n}$ für $\nu = n$ folgenden Ausdruck. Ebenso folgt aus (4) für $\nu = 1$ die Definitionsgleichung für $z_{k,1}$.

Wählt man in (3) $\nu = 0$ bezw. in (4) $\nu = n$, so erhält man beide Male die Gleichung

$$D(y_1, \ldots y_n)\ D(z_{k,1}, \ldots z_{k,n}) = |s_{\alpha,\beta}|, \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots n-1)$$

die unter Berücksichtigung der Werte von $s_{\alpha,\beta}$, so weit dieselben aus I. bekannt sind, folgende Gestalt besitzt:

---

*) Die Art der auftretenden Schwierigkeiten lässt sich aus dem zweiten Teile der citirten Arbeit des Herrn *Grünfeld* erkennen, in welchem sich die Betrachtung allerdings auf die Bestimmung der in der Gleichung (5) vorkommenden Determinante für einige Fälle beschränkt.

$$(5)\quad D(y_1, \ldots y_n)\, D(z_{k,1}, \ldots z_{k,n}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1^{k-1} & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & (-1)^{k-2} & 0 & 0 \ldots 0 & (-1)^{n-1} s_{n,0} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & \ldots & \cdot & \cdot & \cdots s_{k-2,n-2} & s_{k-2,n-1} \\ 1 & 0 & \ldots & \cdot & \cdot & \cdots s_{k-1,n-2} & s_{k-1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \cdot & \cdot & \cdots s_{n-2,n-2} & s_{n-2,n-1} \\ 0 & -s_{n0} & \ldots & \cdot & \cdot & \cdots s_{n-1,n-2} & s_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Man erkennt an diesem Ausdruck, dass sich einfache Wertbestimmungen desselben nur für den von Herrn *Frobenius* betrachteten Fall $k = n$ und ausserdem für den Fall $k = 1$ ergeben. Wir wenden uns jetzt der Betrachtung des letzteren zu.

2. Da von nun an nur von der ersten Adjungirten gehandelt werden wird, möge der Kürze wegen $z_{1,\nu} = z_\nu$ gesetzt werden.

Aus der Gleichung (3) ergiebt sich unter der gemachten Annahme die Beziehung:

$$(6)\quad D(y_1, \ldots y_n)\, D(z_{\nu+1}, \ldots z_n) = (-1)^{\nu+(n-\nu-1)^2} \cdot s_{n,0}^{n-\nu-1} \cdot D(y'_1, \ldots y'_\nu),$$

und hieraus folgt für $\nu = 0$:

$$(7)\qquad D(y_1, \ldots y_n)\, D(z_1, \ldots z_n) = (-1)^{(n-1)^2} \cdot s_{n,0}^{n-1},$$

in Uebereinstimmung mit der aus (5) für $k = 1$ sich ergebenden Relation.

Setzen wir in (6) $\nu = n$, so geht die linke Seite, wie wir bereits oben aus der Gleichung (3) geschlossen haben, in $D(y_1, \ldots y_n)$ über, und wir erhalten daher für $s_{n,0}$ den Ausdruck

$$(8)\qquad s_{n,0} = (-1)^{n-1} \frac{D(y'_1, \ldots y'_n)}{D(y_1, \ldots y_n)},$$

der auch unmittelbar aus der Definition der Grössen $z_1, \ldots z_n$ folgt. Mit Hülfe desselben nehmen die Gleichungen (6) und (7) folgende Gestalt an:

$$(9)\quad D(y_1, \dots y_n)\, D(z_{\nu+1}, \dots z_n) = (-1)^{\nu(n-\nu)} \left\{\frac{D(y'_1, \dots y'_n)}{D(y_1, \dots y_n)}\right\}^{n-\nu-1} \cdot D(y'_1, \dots y'_\nu),$$

$$(10)\quad D(y_1, \dots y_n)\, D(z_1, \dots z_n) = \left\{\frac{D(y'_1, \dots y'_n)}{D(y_1, \dots y_n)}\right\}^{n-1}.$$

Vertauscht man $y_1, \dots y_n$ mit $z_1, \dots z_n$, was wegen der in I. nachgewiesenen Reciprocität zwischen den Grössen y_ρ und z_ρ erlaubt ist, so ergeben sich aus (9) und (10), ebenso wie durch unmittelbare Rechnung, die Gleichungen:

$$(11)\quad D(z_1, \dots z_n)\, D(y_{\nu+1}, \dots y_n) = (-1)^{\nu(n-\nu)} \left\{\frac{D(z'_1, \dots z'_n)}{D(z_1, \dots z_n)}\right\}^{n-\nu-1} \cdot D(z'_1, \dots z'_\nu),$$

$$(12)\quad D(y_1, \dots y_n)\, D(z_1, \dots z_n) = \left\{\frac{D(z'_1, \dots z'_n)}{D(z_1, \dots z_n)}\right\}^{n-1}.$$

Aus (10) und (12) folgt noch die Relation

$$(13)\qquad \frac{D(y'_1, \dots y'_n)}{D(y_1, \dots y_n)} = (-1)^n \frac{D(z'_1, \dots z'_n)}{D(z_1, \dots z_n)},$$

die auch unmittelbar aus (8) und der Beziehung $s_{0,n} = (-1)^n s_{n,0}$ sich ergiebt.

Auf dieselbe Weise liefert die Gleichung (4) die Gleichung

$$(14)\quad D(y_1, \dots y_n)\, D(z_1, \dots z_\nu) = \left\{\frac{D(y'_1, \dots y'_n)}{D(y_1, \dots y_n)}\right\}^{\nu-1} \cdot D(y'_{\nu+1}, \dots y'_n),$$

und durch die oben angegebene Vertauschung oder auch durch directe Rechnung folgt die Gleichung:

$$(15)\quad D(z_1, \dots z_n)\, D(y_1, \dots y_\nu) = \left\{\frac{D(z'_1, \dots z'_n)}{D(z_1, \dots z_n)}\right\}^{\nu-1} \cdot D(z'_{\nu+1}, \dots z'_n).$$

Die vorstehend entwickelten Gleichungen führen noch zu einer Reihe von Relationen, von denen nur die folgenden angegeben werden mögen:

$$(16)\quad \frac{D(z_1, \dots z_\nu)}{D(z_{\nu+1}, \dots z_n)} = (-1)^{\nu(n-\nu)} \left\{ \frac{D(y_1, \dots y_n)}{D(y'_1, \dots y'_n)} \right\}^{n-2\nu} \cdot \frac{D(y'_{\nu+1}, \dots y'_n)}{D(y'_1, \dots y'_\nu)},$$

$$(17)\quad \frac{D(y_1, \dots y_\nu)}{D(y_{\nu+1}, \dots y_n)} = (-1)^{\nu(n-\nu)} \left\{ \frac{D(z_1, \dots z_n)}{D(z'_1, \dots z'_n)} \right\}^{n-2\nu} \cdot \frac{D(z'_{\nu+1}, \dots z'_n)}{D(z'_1, \dots z'_n)},$$

$$(18)\quad D(y_1, \dots y_\nu) \cdot D(z_1, \dots z_\nu) = (-1)^{n(\nu-1)} \left\{ \frac{D(y_1, \dots y_n)}{D(y'_n, \dots y'_n)} \right\}^{n-2\nu+1} \cdot D(y'_{\nu+1}, \dots y'_n)\, D(z'_{\nu+1}, \dots z'_n),$$

$$(19)\quad D(y'_1, \dots y'_\nu) \cdot D(z'_1, \dots z'_\nu) = (-1)^{n(n-\nu-1)} \left\{ \frac{D(y_1, \dots y_n)}{D(y'_1, \dots y'_n)} \right\}^{n-2\nu+2} \cdot D(y_{\nu+1}, \dots y_n)\, D(z_{\nu+1}, \dots z_n),$$

$$(20)\quad \frac{D(y_1, \dots y_\nu)\, D(z_1, \dots z_\nu)}{D(y'_1, \dots y'_\nu)\, D(z'_1, \dots z'_\nu)} = (-1)^{nn} \left\{ \frac{D(y_1, \dots y_n)}{D(y'_1, \dots y'_n)} \right\}^2 \cdot \frac{D(y'_{\nu+1}, \dots y'_n)\, D(z'_{\nu+1}, \dots z'_n)}{D(y_{\nu+1}, \dots y_n)\, D(z_{\nu+1}, \dots z_n)}.$$

Aus (19) und (20) folgt, wenn man $\nu = n$ setzt:

$$(21)\quad D(y'_1, \dots y'_n) \cdot D(z'_1, \dots z'_n) = (-1)^n \cdot \left\{ \frac{D(y'_1, \dots y'_n)}{D(y_1, \dots y_n)} \right\}^{n+1},$$

$$(22)\quad \frac{D(y'_1, \dots y'_n)\, D(z'_1, \dots z'_n)}{D(y_1, \dots y_n)\, D(z_1, \dots z_n)} = (-1)^{nn} \left\{ \frac{D(y'_1, \dots y'_n)}{D(y_1, \dots y_n)} \right\}^2.$$

III.

Die erste Adjungirte einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung.

1. Unter der Annahme, dass $D(y_1, \ldots y_n)$ nicht identisch verschwindet, kann auch, wie wir gezeigt haben, $D(z_1, \ldots z_n)$ im allgemeinen nicht identisch Null sein. Es genügen mithin die Functionen $y_1, \ldots y_n$ und $z_1, \ldots z_n$ bez. den homogenen linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung

$$(1) \qquad P(y) = (-1)^n \frac{D(y, y_1 \ldots y_n)}{D(y_1, \ldots y_n)} = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0,$$

$$(2) \qquad P_1(z) = (-1)^n \frac{D(z, z_1, \ldots z_n)}{D(z_1, \ldots z_n)} = \frac{d^n z}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n z = 0.$$

Die Gleichung (2) ist dann die erste Adjungirte der Gleichung (1). Die Coefficienten p_λ und q_λ drücken sich in bekannter Weise durch Determinantenquotienten aus, und speciell ist

$$p_n = (-1)^n \frac{D(y_1', \ldots y_n')}{D(y_1, \ldots y_n)}, \quad q_n = (-1)^n \frac{D(z_1', \ldots z_n')}{D(z_1, \ldots z_n)}.$$

Wegen der Gleichung II. (13) können wir sofort schliessen, dass

$$q_n = (-1)^n p_n$$

ist. Mit Hülfe dieser Beziehungen lassen sich die in II. entwickelten Determinantenbeziehungen noch in anderer Form schreiben. Die Relationen II. (10), II. (21), II. (22) nehmen beispielsweise die folgende Gestalt an:

$$D(y_1, \ldots y_n) \cdot D(z_1, \ldots z_n) = p_n^{n-1}, \tag{3}$$

$$D(y_1', \ldots y_n') \cdot D(z_1', \ldots z_n') = (-1)^n p_n^{n+1}, \tag{4}$$

$$\frac{D(y_1', \ldots y_n')}{D(y_1, \ldots y_n)} \frac{D(z_1', \ldots z_n')}{D(z_1, \ldots z_n)} = (-1)^n p_n^2. \tag{5}$$

In ähnlicher Weise wie q_n lassen sich auch die übrigen Coefficienten q_λ mittelst der in II entwickelten Determinantenbeziehungen bestimmen, jedoch führt dies zu sehr weitläufigen Rechnungen. Eine einfache Bestimmung ergiebt sich noch für q_1, wenn man die bekannte Beziehung

$$D(y_1, \ldots y_n) = e^{-\int p_1 dx}$$

und die entsprechende für die Gleichung (2), sowie die Gleichung (3) berücksichtigt; es folgt dann

$$q_1 = -\left\{ p_1 + (n-1)\frac{p_n'}{p_n} \right\}.$$

Herr *Cels* hat nun in Anknüpfung an die Betrachtungen, durch welche *Lagrange* auf die gewöhnliche ($n$te) Adjungirte geführt worden ist, gelehrt, wie man allgemein die $k$te Adjungirte einer gegebenen linearen homogenen Differentialgleichung bilden kann. Es führt dies auf Eliminationsprocesse, die sich nur für $k = 1$ unmittelbar ausführen lassen. Es ergiebt sich so, dass die erste Adjungirte der Gleichung $P(y) = 0$ folgende Form hat:

$$P_1(z) = p_n \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{p_n}\frac{dz}{dx}\right) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{p_1}{p_n}\frac{dz}{dx}\right) + \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left(\frac{p_2}{p_n}\frac{dz}{dx}\right) - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{dz}{dx} + (-1)^n z \right\} = 0. \tag{6}$$

In der That haben, wie unmittelbar ersichtlich ist, q_1 und q_n die oben auf andere Weise ermittelten Ausdrücke.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{p}_\varrho = \frac{p_\varrho}{p_n} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots n-1), \qquad \mathfrak{p}_0 = \frac{1}{p_n},$$

so folgen aus (2) und (6) folgende Beziehungen zwischen den Coefficienten q_λ und p_λ:

$$(7)\quad \begin{cases} q_1 = p_n \left\{ \binom{n-1}{1} \mathfrak{p}_0' - \mathfrak{p}_1 \right\} = -\left\{ (n-1) \dfrac{p_n'}{p_n} + p_1 \right\} \\ q_2 = p_n \left\{ \binom{n-1}{2} \mathfrak{p}_0'' - \binom{n-2}{1} \mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2 \right\} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ q_\lambda = p_n \left\{ \binom{n-1}{\lambda} \mathfrak{p}_0^{(\lambda)} - \binom{n-2}{\lambda-1} \mathfrak{p}_1^{(\lambda-1)} + \binom{n-3}{\lambda-2} \mathfrak{p}_2^{(\lambda-2)} - \cdots + (-1)^\lambda \mathfrak{p}_\lambda \right\} \\ \cdot\;\cdot \\ q_n = (-1)^n p_n \end{cases}$$

2. Aus der Beziehung der adjungirten Functionensysteme hatten wir in I. den Schluss gezogen, dass die $k$te Adjungirte der $k$ten Adjungirten mit dem ursprünglichen System, abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimme. Auf Grund des Gleichungssystems (7) lässt sich nun ohne Schwierigkeit zeigen, dass die erste Adjungirte der Gleichung (2) bezw. (6) der ursprünglichen Gleichung (1), abgesehen vom Zeichen, gleich ist. Es ist zu dem Zwecke nur nachzuweisen, dass sich die Coefficienten p_λ durch die q_λ auf dieselbe Weise ausdrücken lassen, wie diese durch jene, dass also das Gleichungssystem (7) umkehrbar ist. Dies aber ergiebt sich leicht auf folgendem Wege.

Dividirt man sämtliche Gleichungen (7) durch die letzte derselben $(-1)^n q_n = p_n$ und setzt dann

$$\mathfrak{q}_\varrho = \frac{q_\varrho}{q_n} \qquad (\varrho = 0,\ 1,\ \ldots\ n-1), \qquad \mathfrak{q}_0 = \frac{1}{q_n},$$

so ist zunächst

$$(-1)^n\, \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{q}_0,$$

und es folgt aus der ersten der Gleichungen (7)

$$(-1)^n\, \mathfrak{p}_1 = \binom{n-1}{1} \mathfrak{q}_0' - \mathfrak{q}_1,$$

und unter Benutzung dieser Gleichung erhält man aus der zweiten der Gleichungen (7)

$$(-1)^n \mathfrak{p}_2 = \binom{n}{2} q_0'' - \binom{n}{1} q_1' + q_2,$$

u. s. f. Es zeigt sich so in der That allgemein, wie leicht zu übersehen ist und im Uebrigen auch durch vollständige Induction begründet werden kann, dass das Gleichungssystem (7) umkehrbar ist; es lassen sich die Quotienten $\frac{p_\rho}{p_n}$ genau in derselben Weise durch die Quotienten $\frac{q_\rho}{q_n}$ (abgesehen von dem allen Gleichungen gemeinsamen Factor $(-1)^n$) ausdrücken wie diese durch jene, d. h. *die erste Adjungirte der ersten Adjungirten ist mit der ursprünglichen Differentialgleichung identisch*, abgesehen von dem Factor $(-1)^n$.

3. Das Gleichungssystem (7) kann ferner dazu dienen, explicit die Bedingungen dafür herzuleiten, dass die ursprüngliche Gleichung (1) mit ihrer ersten Adjungirten (2) übereinstimmt. Man hat dabei offenbar die Fälle zu unterscheiden, in denen die Ordnung n der Differentialgleichung gerade oder ungerade ist.

Ist n gerade, so sind die Grössen $\mathfrak{p}_\lambda$ aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_0 &= \mathfrak{p}_0 \\
\mathfrak{p}_1 &= \binom{n-1}{1} \mathfrak{p}_0' - \mathfrak{p}_1 \\
\mathfrak{p}_2 &= \binom{n-1}{2} \mathfrak{p}_0'' - \binom{n-2}{1} \mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2 \\
\mathfrak{p}_3 &= \binom{n-1}{3} \mathfrak{p}_0''' - \binom{n-2}{2} \mathfrak{p}_1'' + \binom{n-3}{1} \mathfrak{p}_2' - \mathfrak{p}_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Es bleiben dann, wie der Anblick dieser Gleichungen lehrt, die Grössen $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_2, \ldots$ mit geradem Index beliebig, während die Grössen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \ldots$ mit ungeradem Index sich aus Ableitungen jener zusammensetzen; es ergiebt sich so:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= \frac{1}{2}\binom{n-1}{1}\mathfrak{p}_0' \\
\mathfrak{p}_3 &= \frac{1}{4}\binom{n-1}{3}\mathfrak{p}_0''' + \frac{1}{2}\binom{n-1}{1}\mathfrak{p}_2' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Ist dagegen n ungerade, so ist in den obigen Bedingungsgleichungen auf der linken Seite überall das negative Zeichen hinzuzufügen. Die erste der so entstehenden Gleichungen $-\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_0$ erfordert, dass $\mathfrak{p}_0$, also auch p_n verschwindet; dann ergiebt sich aus den übrigen Gleichungen, dass sämmtliche Grössen $\mathfrak{p}_\lambda$ gleich Null sind. Das letztere folgt auch schon daraus, dass $\mathfrak{p}_\lambda = \frac{p_\lambda}{p_n} = p_\lambda \cdot \mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_0 = 0$ ist. Es ergiebt sich somit der *Satz:*

Damit eine lineare homogene Differentialgleichung ihre eigene erste Adjungirte ist, muss sie nothwendig von gerader Ordnung sein.

4. Eine weitere Verwendung findet das Gleichungssystem (7) bei der Beantwortung der Frage, für welche Differentialgleichungen (1) die erste Adjungirte mit der $n$ten (*Lagrange*'schen) Adjungirten übereinstimmt.

Für die $n$te Adjungirte

$$\begin{aligned}
P_n(u) &= \frac{d^n u}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 u) + \cdots + (-1)^n p_n u \\
&= \frac{d^n u}{dx^n} + r_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + r_n u = 0
\end{aligned}$$

finden die bekannten Beziehungen statt:

$$\begin{aligned}
r_1 &= -p_1 \\
r_2 &= -\binom{n-1}{1}p_1' + p_2 \\
r_3 &= -\binom{n-1}{2}p_1'' + \binom{n-2}{1}p_2' - p_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
r_n &= -p_1^{(n-1)} + p_2^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n p_n.
\end{aligned}$$

Zur Uebereinstimmung von $P_n(u)$ mit $P_1(z)$ ist erforderlich, dass $r_\lambda = q_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ ist. Aus der Bedingung $r_1 = q_1$ folgt:

$$\cdots p_1 = \quad (u \cdot 1) \frac{p_n'}{p_n} - p_1,$$

es muss also

$$p_n = C$$

sein, wo C eine willkürliche Constante ist. Berücksichtigen wir dies bei den folgenden Bedingungsgleichungen, so erkennen wir ohne Schwierigkeit, dass nothwendig

$$p_1' = p_2' = \cdots = p_{n-1}' = 0$$

sein muss, dass mithin die Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_n$ beliebige constante Werte besitzen müssen. Demnach können wir den *Satz* aussprechen:

Nur für lineare homogene Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten stimmt die erste Adjungirte derselben mit der nten (*Lagrange*'schen) *überein.*

5. Für $P(y)$ und die $n$te (*Lagrange*'sche) Adjungirte $P_n(u)$ hat Herr *Frobenius* folgende Darstellung angegeben*):

$$(8) \qquad P(y) = \frac{D_n}{D_{n-1}} \frac{d}{dx} \frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \frac{D_0}{D_1} y,$$

$$(9) \qquad P_n(u) = \frac{D_0}{D_1} \frac{d}{dx} \frac{D_1^2}{D_2 D_0} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} \frac{D_{n-1}^2}{D_n D_{n-2}} \frac{d}{dx} \frac{D_n}{D_{n-1}} u,$$

wobei

$$D_\lambda = D(y_1, \ldots y_\lambda), \qquad D_0 = 1$$

gesetzt ist. Stellt man sich die erste Adjungirte $P_1(z)$ zunächst in derselben Weise dar, wie es mit $P(y)$ in (8) geschehen ist, und drückt man alsdann mit Hülfe der in II. abgeleiteten Gleichung (14) die auftretenden Determinanten der Grössen z_λ durch Determinanten der Grössen y_λ aus, so erhält man eine neue Darstellung der ersten Adjun-

*) A. a. O. S. 257.

girten. Da diese Form auch von Herrn *Grünfeld* abgeleitet worden ist*), so können wir uns auf die Angabe des Resultates beschränken; es wird:

$$(10)\quad P_1(z)=\frac{\mathfrak{D}_n}{D_n}\frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_1}\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_1^2}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_0}\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_2^2}{\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_{n-2}^2}{\mathfrak{D}_{n-1}\mathfrak{D}_{n-3}}\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_{n-1}^2}{\mathfrak{D}_n\mathfrak{D}_{n-2}}\frac{d}{dx}\frac{D_n}{\mathfrak{D}_{n-1}}z,$$

wenn wir die abkürzende Bezeichnung benutzen:

$$D_n = D(y_1, \ldots y_n)$$
$$\mathfrak{D}_\lambda = D(y'_{n-\lambda+1}, \cdots y'_n)$$
$$\mathfrak{D}_0 = 1.$$

Die beiden Darstellungen (9) und (10) zeigen eine grosse Uebereinstimmung in der Form, und die Gleichung (10) giebt eine neue Art der Bildung der ersten Adjungirten an: *Fasst man in den beiden Gleichungen (9) und (10) D_n mit u bezw. z zusammen, so geht die erste Adjungirte $P_1(z)$ aus der gewöhnlichen, nten Adjungirten hervor, indem man überall in den Determinanten D_λ, welche in (9) in der auf $D_n u$ auszuübenden Operation auftreten, statt der λ ersten Grössen $y_1, y_2, \ldots y_\lambda$ die λ letzten Grössen $y'_{n-\lambda+1}, \ldots y'_n$ einführt und die ganze Operation am Anfange noch mit* $\dfrac{\mathfrak{D}_n}{D_n}=\dfrac{D(y'_1, \ldots y'_n)}{D(y_1, \ldots y_n)}$ *multiplicirt.*

6. Für die Erkennung der Eigenschaften der ersten Adjungirten erweist es sich als vorteilhaft, den am Anfange stehenden Factor $\dfrac{\mathfrak{D}_n}{D_n}$ fortzulassen. Alsdann ist die Analogie zwischen den Darstellungen (2) und (3) eine viel vollkommenere: Man erhält dann die erste Adjungirte aus der $n$ten (*Lagrange*'schen), indem man in der auf $D_n u$ ausgeübten Operation durchweg die Determinanten D_λ, welche die ersten λ Grössen $y_1, \ldots y_\lambda$ enthalten, durch die Determinanten $\mathfrak{D}_\lambda$ der λ letzten Grössen $y'_{n-\lambda+1}, \ldots y'_n$ ersetzt.

Die Fortlassung des am Anfang stehenden Factors $\dfrac{\mathfrak{D}_n}{D_n}$, der ja nach II

*) A. a. O. S. 334—335. Herr *Grünfeld* hat jedoch den weiterhin nachgewiesenen eigentümlichen Zusammenhang der Gleichungen (9) und (10) nicht bemerkt.

nichts anderes ist als $(-1)^n p_n$, kommt also darauf hinaus, dass wir die erste Adjungirte durch die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(z) = \frac{(-1)^n}{p_n} P_1(z) = z - \frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\frac{p_{n-2}}{p_n}\frac{dz}{dx}\right) - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{p_1}{p_n}\frac{dz}{dx}\right) + (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{1}{p_n}\frac{dz}{dx}\right)$$

oder also durch die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(z) = z - \mathfrak{p}_{n-1}\frac{dz}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\mathfrak{p}_{n-2}\frac{dz}{dx}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\mathfrak{p}_0\frac{dz}{dx}\right)$$

definiren, und wir haben für $\mathfrak{P}_1(z)$ mithin die Darstellung

$$\mathfrak{P}_1(z) = \frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_1}\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_1^2}{\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_0}\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_2^2}{\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1}\frac{d}{dx}\cdots\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_{n-2}^2}{\mathfrak{D}_{n-1}\mathfrak{D}_{n-3}}\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{D}_{n-1}^2}{\mathfrak{D}_n\mathfrak{D}_{n-2}}\frac{d}{dx}\frac{D_n}{\mathfrak{D}_{n-1}} z.$$

Aus dieser Form ergiebt sich aber ohne weiteres, wie unten noch auf andere Weise erschlossen werden soll, der *Satz:*

Ist ein linearer homogener Differentialausdruck aus mehreren anderen zusammengesetzt, so ist der erste adjungirte Differentialausdruck aus den ersten Adjungirten der einzelnen Componenten in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt.

Falls die Componenten alle einander gleich sind, kommt man auf die Iteration, und es folgt unmittelbar: *Die Iterationen eines Differentialausdrucks und des ersten Adjungirten desselben sind die ersten Adjungirten von einander.*

7. Es mag noch bemerkt werden, dass zur Definition der ersten Adjungirten der Gleichung $P(y) = 0$ die Annahme wesentlich ist, dass $p_n \neq 0$ ist. Wäre $p_n = 0$, also auch $D(y_1', \ldots y_n') = 0$, so würde $P_1(z)$ identisch verschwinden, und aus der Gleichung II. (10) bezw. III. (3) würde folgen, dass $D(z_1, \ldots z_n) = 0$ ist, dass mithin die Grössen $z_1, \ldots z_n$ nicht mehr linear unabhängig sind. Für die $n$te Adjungirte ist dagegen das Verschwinden eines oder beliebig vieler Coefficienten ohne Einfluss, da zu jedem einzelnen Gliede das adjungirte definirt ist.

Der Grund für dieses abweichende Verhalten der ersten, zweiten, ... $(n-1)$ten Adjungirten lässt sich auch leicht aus der von Herrn *Cels* angegebenen Bildungsweise*) der $k$ten Adjungirten einer Gleichung $n$ter Ordnung entnehmen. Ist nämlich

$$P(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

die gegebene Gleichung, so entsteht die $k$te Adjungirte derselben durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen

$$z = p_{n-k} y - \frac{d}{dx}(p_{n-k-1} y) + \cdots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(p_0 y)$$

und

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(p_{n-k+1} y) - \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(p_{n-k+2} y) + \cdots + (-1)^{k-1}(p_n y).$$

Die Coefficienten $p_0, p_1, \cdots p_{n-k}$, die in der ersten dieser beiden Gleichungen auftreten, können nicht sämtlich verschwinden, da mindestens $p_0 \neq 0$ ist, weil sonst $P(y)$ nicht von der $n$ten Ordnung wäre. Dagegen können die Coefficienten $p_{n-k+1}, \cdots p_n$ der zweiten Gleichung sämtlich verschwinden, es ist dann $\frac{d^k z}{dx^k} = 0$, und die Elimination von y ist alsdann unmöglich. In diesem Falle existiren die Adjungirten von der ersten bis zur $k$ten gar nicht. Man muss die Gleichung $P(y) = 0$ auf eine niedrigere Ordnung reduciren, in der der Coefficient der abhängigen Variabeln von Null verschieden ist, und kann nun die der Ordnung entsprechende Anzahl von Adjungirten bestimmen.

8. Die vorliegenden Betrachtungen mögen mit dem Hinweis abgeschlossen werden, dass für die erste Adjungirte ein Ausdruck gebildet werden kann, der dem begleitenden bilinearen Differentialausdruck für die $n$te Adjungirte vollkommen analog ist und eine ähnliche Bedeutung wie dieser besitzt.**)

*) A. a. O. S. 19.

**) *J. Cels*, Comptes Rendus, t. 115, p. 1057—1059.

Dividirt man nämlich die Gleichung (1) durch p_n, das immer als von Null verschieden vorauszusetzen ist, wenn von der ersten Adjungirten gehandelt wird, und benutzt die oben eingeführten Grössen $\mathfrak{p}_\lambda$, so nimmt die ursprüngliche Gleichung die Form an:

$$\mathfrak{P}(y) = \frac{1}{p_n} P(y) = \frac{D(y, y_1, \dots y_n)}{D(y_1', \dots y_n')}$$
$$= \mathfrak{p}_0 y^{(n)} + \mathfrak{p}_1 y^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{p}_{n-1} y' + y = 0,$$

und die erste Adjungirte derselben verwandelt sich in

$$\mathfrak{P}_1(z) = \frac{1}{q_n} P_1(z) = \frac{D(z, z_1, \dots z_n)}{D(z_1', \dots z_n')}$$
$$= \mathfrak{q}_0 z^{(n)} + \mathfrak{q}_1 z^{(n-1)} + \cdots + \mathfrak{q}_{n-1} z' + z$$
$$= (-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\mathfrak{p}_0 z') + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (\mathfrak{p}_1 z') + \cdots - \mathfrak{p}_{n-1} z' + z = 0.$$

Bildet man nun den Ausdruck

$$z' \mathfrak{P}(y) + y' \mathfrak{P}_1(z),$$

so erkennt man ohne Schwierigkeit, dass derselbe das vollständige Differential eines in y und z bilinearen Differentialausdrucks $P_1(y, z)$ von der $(n-1)$ten Ordnung ist, den man zweckmässig als den *ersten begleitenden bilinearen Differentialausdruck* bezeichnen kann:

$$z' \mathfrak{P}(y) + y' \mathfrak{P}_1(z) = \frac{d}{dx} P_1(y, z).$$

Es ergiebt sich für $P_1(y, z)$ leicht die folgende Darstellung:

$$P_1(y, z) = yz + y' \left\{ \mathfrak{p}_{n-2} z' - \frac{d}{dx} (\mathfrak{p}_{n-3} z') + \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (\mathfrak{p}_0 z') \right\}$$
$$+ y'' \left\{ \mathfrak{p}_{n-3} z' - \frac{d}{dx} (\mathfrak{p}_{n-4} z') + \cdots + (-1)^{n-3} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} (\mathfrak{p}_0 z') \right\}$$
$$+ y''' \left\{ \mathfrak{p}_{n-4} z' - \frac{d}{dx} (\mathfrak{p}_{n-5} z') + \cdots + (-1)^{n-4} \frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}} (\mathfrak{p}_0 z') \right\}$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ y^{(n-1)} \mathfrak{p}_0 z'.$$

9. Dieser erste begleitende bilineare Differentialausdruck gestattet nun, in einfachster Weise die oben (III. 6) ausgesprochenen Sätze herzuleiten.

Sind $\mathfrak{P}(y)$ und $\mathfrak{Q}(y)$ zwei lineare homogene Differentialausdrücke von beliebiger Ordnung, in welchen der Coefficient von y gleich Eins ist, und bezeichnen $\mathfrak{P}_1(z)$ und $\mathfrak{Q}_1(z)$ die ersten Adjungirten derselben, so müssen die Gleichungen gelten:

$$z'\mathfrak{P}(y) + y'\mathfrak{P}_1(z) = \frac{d}{dx} P_1(y, z), \tag{11}$$

$$z'\mathfrak{Q}(y) + y'\mathfrak{Q}_1(z) = \frac{d}{dx} Q_1(y, z), \tag{12}$$

wo $P_1(y, z)$, $Q_1(y, z)$ zwei in y und z lineare Differentialausdrücke bedeuten.

Setzt man in (11) $\mathfrak{Q}(y)$ für y, also $\mathfrak{Q}'(y) \cdot y'$ für y' ein, so kommt:

$$z'\mathfrak{P}\big(\mathfrak{Q}(y)\big) + y'\mathfrak{Q}'(y) \cdot \mathfrak{P}_1(z) = \frac{d}{dx} P_1\big(\mathfrak{Q}(y), z\big). \tag{13}$$

Ebenso ergiebt sich aus (12), wenn man $\mathfrak{P}_1(z)$ für z, also $\mathfrak{P}_1'(z) \cdot z'$ für z' darin einsetzt:

$$z' \cdot \mathfrak{P}_1'(z) \cdot \mathfrak{Q}(y) + y'\mathfrak{Q}_1\big(\mathfrak{P}_1(z)\big) = \frac{d}{dx} Q_1\big(y, \mathfrak{P}_1(z)\big). \tag{14}$$

Addirt man die Gleichungen (13) und (14), so folgt:

$$z'\mathfrak{P}\big(\mathfrak{Q}(y)\big) + y'\mathfrak{Q}_1\big(\mathfrak{P}_1(z)\big) = \frac{d}{dx}\{P_1\big(\mathfrak{Q}(y), z\big) + Q_1\big(y, \mathfrak{P}_1(z)\big)\}$$
$$-\{\mathfrak{P}_1(z) \cdot \mathfrak{Q}'(y)\, y' + \mathfrak{Q}(y) \cdot \mathfrak{P}_1'(z) z'\}.$$

Der letzte Teil ist aber nichts anderes als

$$\frac{d}{dx}\{\mathfrak{P}_1(z)\, \mathfrak{Q}(y)\},$$

so dass man die vorhergehende Gleichung so schreiben kann:

$$z'\mathfrak{P}\mathfrak{Q}(y) + y'\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1(z) = \frac{d}{dx}\{P_1\big(\mathfrak{Q}(y), z\big) + Q_1\big(y, \mathfrak{P}_1(z)\big) - \mathfrak{P}_1(z)\mathfrak{Q}(y)\}. \tag{15}$$

Diese Gleichung besagt aber, dass der erste adjungirte Differentialausdruck von $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ gleich $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{P}_1$ ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussweise erhält man also den bereits oben ausgesprochenen Satz, dass sich die erste Adjungirte eines zusammengesetzten Differentialausdrucks aus den ersten Adjungirten in umgekehrter Reihenfolge zusammensetzt.

Es ist damit die nicht unwichtige Einsicht gewonnen, dass der von den Herren *Thomé* und *Frobenius* gleichzeitig entdeckte Reciprocitätssatz für die gewöhnlichen Adjungirten nicht charakteristisch ist; er gilt auch für die ersten adjungirten Differentialausdrücke.

Bei Zugrundelegung der obigen Definition der ersten Adjungirten ergiebt sich auch ohne weiteres, dass der *Hesse*'sche Satz unmittelbar auf die erste Adjungirte ausgedehnt werden kann: Es ist der erste adjungirte und bezw. der erste begleitende bilineare Differentialausdruck einer Summe gleich der Summe der ersten adjungirten bezw. der ersten begleitenden bilinearen Differentialausdrücke der einzelnen Summanden. Denn aus (11) und (12) folgt durch Addition:

$$z'\{\mathfrak{P}(y)+\mathfrak{Q}(y)\}+y'\{\mathfrak{P}_1(z)+\mathfrak{Q}_1(z)\}=\frac{d}{dx}\{P_1(y,\,z)+Q_1(y,\,z)\}.$$

Druck von G. Bernstein in Berlin.